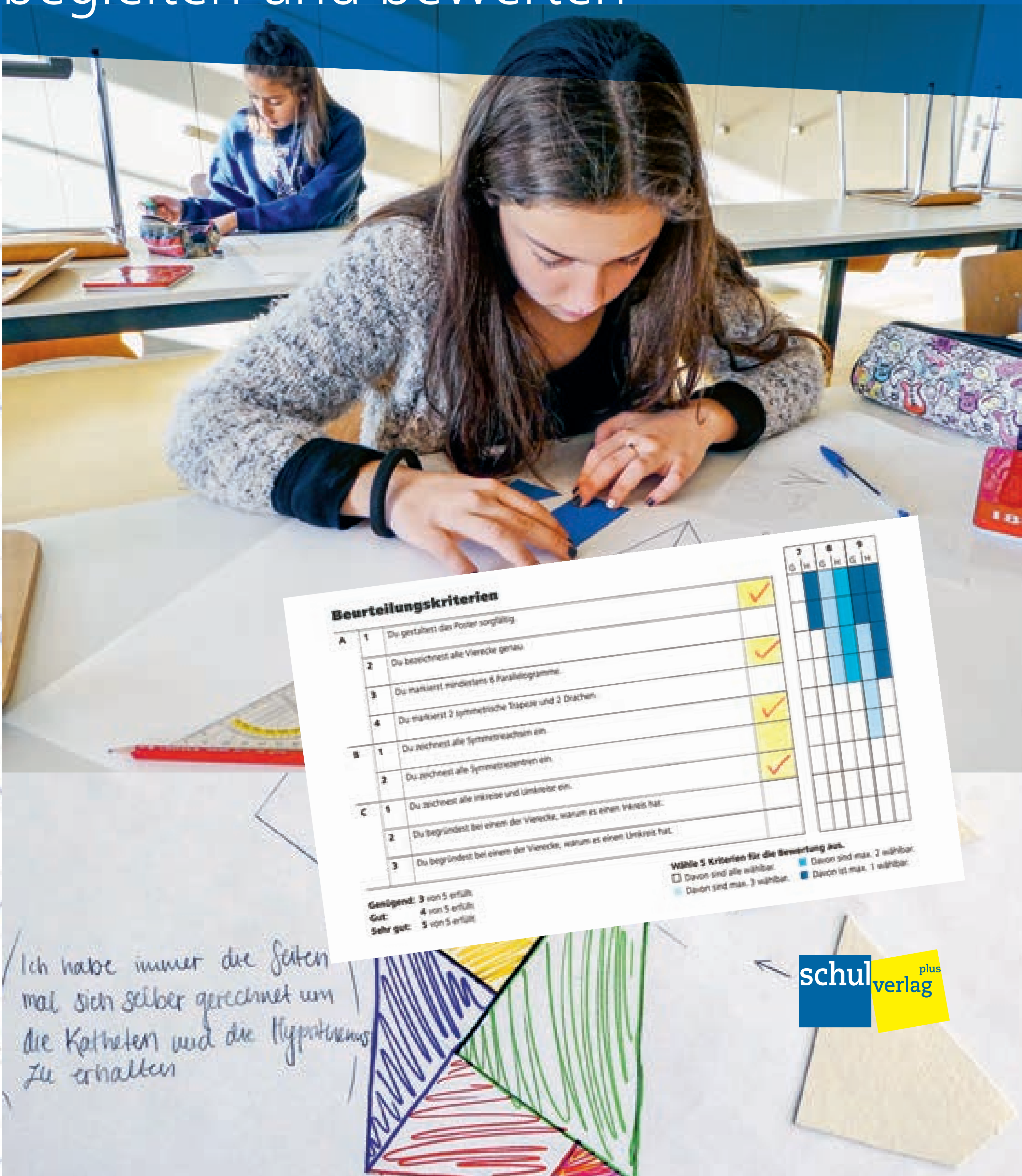
3. Zyklus

Produkte im Mathematikunterricht
begleiten und bewerten



schulverlag plus

Impressum

Interkantonale Lehrmittelzentrale

In Koordination mit der Interkantonalen Lehrmittelzentrale

Autorenteam
Werner Jundt
Annegret Nydegger

Beratung
Beat Wälti

Projektleitung
Luzia Hungerbühler

Herstellung
Sandro Steffen

Grafische Konzeption und Gestaltung
raschle & partner GmbH, www.raschlepartner.ch

Als Besitzerin oder Besitzer dieses Buches sind Sie berechtigt, die geschützten Downloads herunterzuladen und diese in Ihrem Unterricht zu verwenden. Dazu müssen Sie beim Schulverlag ein Konto (Account) eröffnen und die Lizenznummer in der beigelegten Nutzungslizenz aus diesem neuen Konto (oder auf einem bereits bestehenden Konto) aktivieren. Informationen zur Accounteröffnung und Freischaltung von Lizenzen erhalten Sie unter: www.schulverlag.ch/faq.

1. Auflage 2018

Schulverlag plus AG
Art.-Nr. 88897
ISBN 978-3-292-00860-2
www.mathe-bewertung.ch

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C003482

Inhaltsverzeichnis

Die Aufgaben sind nach Kompetenzbereichen des Lehrplans 21 geordnet. Das Verzeichnis gibt keine Reihenfolge der Bearbeitung vor. Alle Aufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

2 Würfelspiel

Du lernst ein Spiel kennen. Dieses ergänzt du und untersuchst es auf Gewinnchancen.

Aufgabenstellung

Die Spielregeln

- Alle Mitspielenden erhalten ein Set Bedingungskarten und legen diese offen vor sich hin.
- Wer dran ist, würfelt mit zwei Würfeln und schaut, ob die gewürfelten Zahlen die Bedingung einer Karte erfüllen.
- Wenn die gewürfelten Zahlen die Bedingung einer Karte erfüllen, wird diese auf den persönlichen Gewinnstapel gelegt. Wenn die Bedingungen mehrerer Karten erfüllt sind, wird eine dieser Karten auf den Gewinnstapel gelegt.
- Wenn keine Bedingung erfüllt ist, wird eine beliebige Karte aus dem Spiel genommen.
- Dann ist der/die Nächste dran.
- Pro Spielrunde verringert sich somit die Zahl der noch offenen Karten für alle Spielenden um eine Karte.
- Das Spiel ist zu Ende, wenn keine Karten mehr offen auf dem Tisch liegen.
- Es gewinnt, wer am Ende am meisten Karten auf seinem Gewinnstapel hat.

Das sind drei Bedingungskarten:

Die Zahlen ergeben eine gerade Summe. Z. B. Würfel mit 3 und 5	Es liegt genau eine 6. Z. B. Würfel mit 5 und 6	Das Produkt der beiden Zahlen ist durch 10 teilbar. Z. B. Würfel mit 5 und 6

A

Erfinde mindestens fünf weitere Bedingungskarten mit möglichen Ereignissen zu diesem Spiel.
Ihre Trefferwahrscheinlichkeit soll grösser als 0 %, aber kleiner als 100 % sein. Keine Wahrscheinlichkeit soll mehrfach vorkommen.

B

Überlege, wie man das Spiel gewinnen kann.

C

Stelle Überlegungen an zu Trefferwahrscheinlichkeiten.
Welche Wahrscheinlichkeiten gelten für einzelne Ereignisse?
Wie kann man diese bestimmen?

Beurteilungskriterien

				7 G	7 H	8 G	8 H	9 G	9 H
A	**1**	Du formulierst eine Bedingung mit einer höheren Trefferwahrscheinlichkeit als jede der drei vorgegebenen Karten. Du begründest das.							
	2	Du formulierst eine Bedingung mit einer tieferen Trefferwahrscheinlichkeit als jede der drei vorgegebenen Karten. Du begründest das.							
	3	Eine deiner Bedingungen hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 25 %.							
B	**1**	Du beschreibst eine Strategie, die dir hilft, möglichst viele Karten zu gewinnen.							
	2	Du begründest, dass das Spiel weder ein reines Glücksspiel noch ein reines Strategiespiel ist.							
C	**1**	Du bestimmst bei fünf von dir entworfenen Bedingungskarten die Trefferwahrscheinlichkeit.							
	2	Du beschreibst, wie man durch Abzählen alle Trefferwahrscheinlichkeiten bestimmen kann.							
	3	Du begründest drei Trefferwahrscheinlichkeiten (von vorgegebenen oder eigenen Karten) anders als durch direktes Abzählen.							

Genügend: **3** von 5 erfüllt
Gut: **4** von 5 erfüllt
Sehr gut: **5** von 5 erfüllt

Wähle 5 Kriterien für die Bewertung aus.

☐ Davon sind alle wählbar.
Davon sind max. 2 wählbar.
Davon sind max. 3 wählbar.
Davon ist max. 1 wählbar.

Einbettung

Handlungsaspekte	Kompetenzbereiche		
	Z+V	F+R	GFD+Z
O+B			3.A.1
E+A			3.B.2
M+D			3.C.1

MA.3.A.1 Begriffe und Symbole verstehen und verwenden.

MA.3.B.2 Sachsituationen zu Statistik, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit erforschen, Vermutungen formulieren und überprüfen.

MA.3.C.1 Daten zu Statistik, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit erheben, ordnen, darstellen, auswerten und interpretieren.

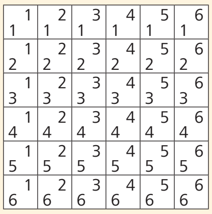
Zur Sache

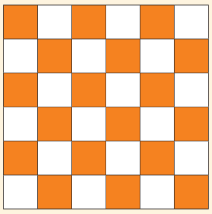
Es geht darum, Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen abzuschätzen und genau zu bestimmen. Auch sollen strategische Überlegungen formuliert werden.

Beim Würfeln mit zwei Würfeln sind 36 verschiedene Ereignisse möglich. Daher können die Trefferwahrscheinlichkeiten abgezählt werden.

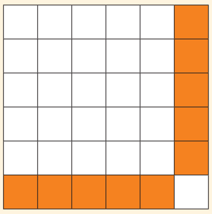
In einer 6-mal-6-Matrix können die günstigen Fälle farbig markiert werden.

Beispiel: «Genau eine 6» trifft in 10 von 36 Fällen zu. Das ergibt eine Wahrscheinlichkeit von 27,8 %.

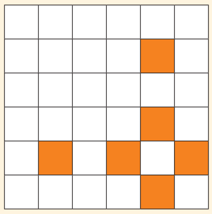




Gerade Summe



Genau eine 6



Produkt durch 10 teilbar

	Die 3 vorgegebenen und 9 weitere mögliche Bedingungen	Wahrscheinlichkeit in %
1	Es liegen 2 Einsen.	2,777…
2	Die Zahlen ergeben die Summe 10.	8,333…
3	Beide Zahlen sind grösser als 4.	11,111…
4	Die Zahlen sind aufeinanderfolgend.	13,888…
5	Das Produkt der beiden Zahlen ist durch 10 teilbar.	16,666…
6	Die Zahlen ergeben ein ungerades Produkt.	25
7	Es liegt genau eine 6.	27,777…
8	Es liegt mindestens eine 6.	30,555…
9	Beide Zahlen sind grösser als 2.	44,444…
10	Die Zahlen ergeben eine gerade Summe.	50
11	Die Zahlen ergeben ein gerades Produkt.	75
12	Es liegt eine Zahl über 2.	88,888

Lösungsbeispiele

A1 Bedingungen 11 und 12 (siehe oben).

A2 Bedingungen 1 bis 4 (siehe oben).

A3 Bedingung 6 (siehe oben). Oder: Beide Zahlen sind kleiner als 4.

B1 Man erhöht die Gewinnchancen, wenn man
- von seinen restlichen Karten diejenige mit der kleinsten Trefferwahrscheinlichkeit aus dem Spiel nimmt,
- von mehreren möglichen Karten diejenige mit der kleineren Trefferwahrscheinlichkeit einsteckt.

B2 Das Spiel ist kein reines Glücksspiel, weil es eine Strategie zur Verbesserung der Gewinnchancen gibt.

Es ist kein reines Strategiespiel, weil die Würfelereignisse dem Zufall unterliegen.

C1 Siehe Tabelle oben.

C2 Man zählt (z. B. in einer 6-mal-6-Tabelle) die günstigen Ereignisse. Bei 36 möglichen Ereignissen ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, indem man die Anzahl günstiger Ereignisse durch 36 dividiert.

C3 Bedingung 1: Es liegen 2 Einsen. Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{1}{6}$ von $\frac{1}{6}$.

Bedingung 5: Das Produkt der beiden Zahlen ist durch 10 teilbar. 5 kombiniert mit 2, 4 oder 6, mit je zwei Reihenfolgen ergibt 6 von 36 Fällen.

Bedingung 6: Die Zahlen ergeben ein ungerades Produkt. Von 4 möglichen Kombinationen (gg, gu, ug, uu) ist nur die letzte günstig: $\frac{1}{4}$.

(Bedingung 7: Es liegt genau eine 6. $\frac{1}{6}$ + $\frac{1}{6}$ von $\frac{5}{6}$ – $\frac{1}{6}$ • $\frac{1}{6}$.)

(Bedingung 8: Es liegt mindestens eine 6. $\frac{1}{6}$ + $\frac{1}{6}$ von $\frac{5}{6}$.)

Bedingung 9: Beide Zahlen sind grösser als 2. $\frac{4}{6}$ • $\frac{4}{6}$.

Bedingung 10: Die Zahlen ergeben eine gerade Summe. Von 4 möglichen Kombinationen (gg, gu, ug, uu) sind zwei günstig: $\frac{1}{2}$.

Bedingung 11: Die Zahlen ergeben ein gerades Produkt. Von 4 möglichen Kombinationen (gg, gu, ug, uu) sind drei günstig: $\frac{3}{4}$.

(Bedingung 12: Es liegt eine Zahl über 2. $\frac{2}{3}$ + $\frac{1}{3}$ von $\frac{2}{3}$.)

Die Bedingungen 7, 8 und 12 sind auf dieser Stufe wohl nur durch Abzählen zugänglich.

Bei den Bedingungen 2 bis 4 ist direktes Abzählen naheliegend.

Umsetzung

Voraussetzungen

Die Lernenden haben eine Vorstellung von Wahrscheinlichkeit und Verständnis für diesbezügliche Angaben in Prozent zwischen 0 % («unmöglich») und 100 % («sicher»).

Wenn es der Gewohnheit entspricht, können die Wahrscheinlichkeiten auch in Bruchform statt in Prozent angegeben werden.

Zeitbedarf

Ca. 4 Lektionen (je nachdem, wie ausgiebig gespielt wird)

Material

Vorbereitete Spielkarten (KV 2.1 und 2.2)

Produkte im Mathematikunterricht # Zyklus 3 # **2 – Würfelspiel** # Kopiervorlage 2.1

Würfelspiel

Die Zahlen ergeben eine gerade Summe.	Es liegt genau eine 6.
Das Produkt der beiden Zahlen ist durch 10 teilbar.	

Produkte im Mathematikunterricht # Zyklus 3 # **2 – Würfelspiel** # Kopiervorlage 2.2

Ereignistafeln – 2 Würfel werfen

1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1
1 2	2 2	3 2	4 2	5 2	6 2
1 3	2 3	3 3	4 3	5 3	6 3
1 4	2 4	3 4	4 4	5 4	6 4
1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	6 5
1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

Inszenierung

Das Spiel lässt sich mit den drei vorgegebenen Karten versuchsweise zu zweit spielen. Es kann auch im Klassenverband simuliert werden. Dabei können Vermutungen zu Wahrscheinlichkeiten diskutiert – aber nicht bewiesen – werden. Als Beispiel einer Ergänzungskarte kann genannt werden: «Es liegt eine 3 oder eine 4» (Wahrscheinlichkeit 55,555… %). Diese Karte darf dann aber nicht verwendet werden – aber nachgemacht (z. B. «1 oder 6»).

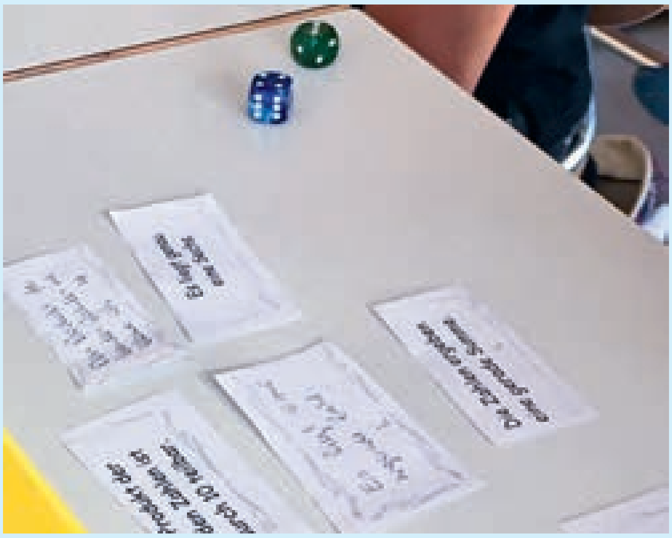
Am Beispiel eines Wurfs zweier Münzen kann die «Ereignismatrix» besprochen werden, evtl. mit der Anregung, diese Darstellung für den Wurf zweier Würfel zu adaptieren. In diesem Fall entwickeln die Schülerinnen und Schüler die 36er-Tafel selber.

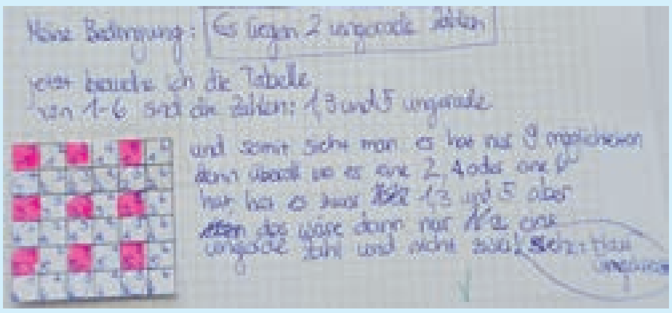
	K	Z
K	K K	Z K
Z	K Z	Z Z

Je nach Lernstand der Klasse kann es aber auch sinnvoll sein, die 36er-Tafel als Kopiervorlage abzugeben (KV 2.2).

Wichtig: Es ist mit zwei verschiedenfarbigen Würfeln zu spielen! So wird klar, dass (3 und 4) und (4 und 3) zwei verschiedene Ereignisse sind, dass es aber nur ein Ereignis (5 und 5) gibt.

Es sollte genügend Zeit fürs Spielen eingesetzt werden, damit das Gefühl für Wahrscheinlichkeit gestärkt wird. Bis Vermutungen über theoretische Zusammenhänge entstehen und sich festigen können, müssen viele konkrete Erfahrungen gemacht werden.





Umgang mit den Produkten

Wenn das Spiel mit den selber entworfenen Karten gespielt wird, sind die Gewinnchancen nicht ausgeglichen, da nicht alle die gleichen Karten haben. Das kann zum Anlass genommen werden, die Karten «nachzubessern». Diese erfüllen dann aber vielleicht die obigen Bewertungskriterien nicht mehr. Darum ist es ratsam, die Erstellung des Produktes von der Wettkampfvariante des Spiels – mit in der Klasse vereinheitlichten Karten – zu trennen.

Das Spiel kann später ergänzt und für weitere Untersuchungen eingesetzt werden:
- Weitere Bedingungskarten
- Spiel mit drei Würfeln
- Statistische Untersuchungen (Zufallsexperimente) und Vergleich der empirischen Ergebnisse mit kombinatorisch hergeleiteten Werten.

3 Mit Bildern rechnen

Durch Abschätzen und Vergleichen lassen sich mithilfe von Bildern Grössenvorstellungen aufbauen.

Aufgabenstellung

Wähle ein Bild aus.

A
Stelle dazu drei Fragen, die sich durch Abschätzen und Berechnen beantworten lassen.

B
Bearbeite die deiner Meinung nach interessanteste dieser Fragen und dokumentiere, wie du vorgehst.

C
Kommentiere das Ergebnis.

Geschenk?

Heissluftballon

Ein Kreuzfahrtschiff

Das Haus ist 178 m hoch

Beurteilungskriterien

				7 G	7 H	8 G	8 H	9 G	9 H
A	**1**	Du stellst drei durch Abschätzen und Berechnen beantwortbare Fragen zum ausgewählten Bild.							
B	**1**	Du zeigst, welche der Zahlen und Grössen, mit denen du arbeitest, geschätzt sind und welche gegeben sind.							
	2	Deine geschätzten Annahmen sind realistisch.							
	3	Du stellst dein Vorgehen nachvollziehbar dar.							
	4	Du illustrierst Berechnungen und Schätzungen mit Skizzen.							
	5	Deine Berechnungen sind korrekt und weisen eine sinnvolle Genauigkeit auf.							
C	**1**	Du kommentierst das Ergebnis.							
	2	Du vergleichst das Ergebnis mit etwas Bekanntem (in Textform und/oder mit Illustrationen).							

Genügend: **3** von 5 erfüllt
Gut: **4** von 5 erfüllt
Sehr gut: **5** von 5 erfüllt

Wähle 5 Kriterien für die Bewertung aus.
☐ Davon sind alle wählbar.
■ Davon sind max. 2 wählbar.
■ Davon ist max. 1 wählbar.

11 Algorithmen

Ein Algorithmus ist eine streng definierte Abfolge von Operationen.
Damit lässt sich eine Zahlenfolge gewinnen, die man auch grafisch darstellen kann.

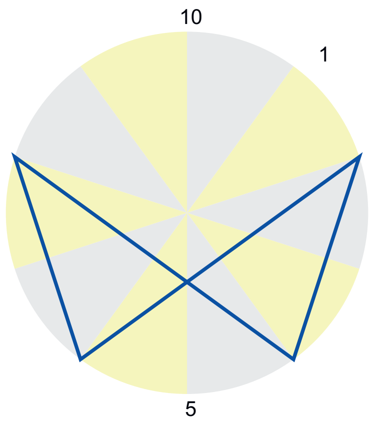
Aufgabenstellung

Der 3e-Algorithmus
Nimm eine zweistellige Zahl.
Verdreifache die Einerziffer.
Verfahre mit dem Ergebnis ebenso.
Fahre weiter.

Mit **3e**-Algorithmus bezeichnen wir das Ver-**3**-fachen der **E**inerziffer.

Die entstehende Zahlenfolge mit der Startziffer 6 kann in einem 10-teiligen Kreisdiagramm als Streckenzug eingetragen werden.

Beispiel:
16 $3 \cdot 6 = 18$
18 $3 \cdot 8 = 24$
24 $3 \cdot 4 = 12$
Einerziffer:
6 ⟶ 8 ⟶ 4 ⟶ 2 ⟶ 6 ⟶ …

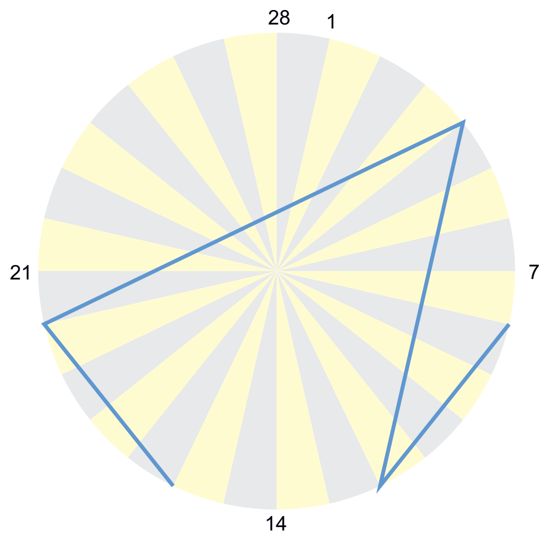


A
Untersuche den 3e-Algorithmus mit anderen Startzahlen.

B
Untersuche verwandte Algorithmen, zum Beispiel den 4e-Algorithmus (4-fache Einerziffer), den 6e-Algorithmus usw.

Der 2z + 3e-Algorithmus
Nimm eine zweistellige Zahl.
Addiere das Doppelte der Zehnerziffer und das Dreifache der Einerziffer.
Verfahre mit dem Ergebnis ebenso.
Fahre weiter.

Beispiel:
16 $2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 = 20$
20 $2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 4$
04 $2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$
16 ⟶ 20 ⟶ 04 ⟶ 12 ⟶ 08 ⟶ …



Die entstehende Zahlenfolge mit der Startzahl 16 kann in einem 28-teiligen Kreisdiagramm als Streckenzug eingetragen werden.

Für Zahlen über 28 würde man im Uhrzeigersinn weiterzählen (29 ⟶ 1 usw.)

C
Untersuche den 2z+3e-Algorithmus und verfasse einen Forschungsbericht.

Beurteilungskriterien

				7		8		9	
				G	H	G	H	G	H
A	**1**	Du berechnest die Zahlenfolge und zeichnest das Diagramm zu 3 weiteren Startzahlen.							
B	**1**	Du beschreibst für 2 verwandte Algorithmen (z. B. 4e; 6e) zu verschiedenen Startzahlen die Ergebnisse (Folgen, Muster).							
C	**1**	Du führst das angefangene Beispiel zum 2z+3e-Algorithmus weiter, bis du eine Regelmässigkeit beschreiben kannst.							
	2	Du zeichnest das Diagramm für das Beispiel mit der Startzahl 16 in das 28-teilige Kreisdiagramm (KV 11.2).							
	3	Du wendest den 2z+3e-Algorithmus auf weitere Zahlen an, bis du 3 unterschiedliche Zahlenfolgen erhältst.							
	4	Du trägst die unterschiedlichen Graphen in das 28-teilige Kreisdiagramm (KV 11.2) ein.							
	5	Du beschreibst, was dir an den Diagrammen zum 2z+3e-Algorithmus auffällt.							
	6	Du stellst 4 Vermutungen auf und überprüfst sie.							
	7	Du nennst für den 2z+3e-Algorithmus 2 Gesetzmässigkeiten, die für unendlich viele Startzahlen gelten. (Z. B. 2, 30, 58, 86, … führen alle auf den grünen Graphen.)							
	8	Du kannst für alle zweistelligen Startzahlen die Graphen zuordnen.							

Genügend: **3** von 5 erfüllt
Gut: **4** von 5 erfüllt
Sehr gut: **5** von 5 erfüllt

Wähle 5 Kriterien für die Bewertung aus.

- ☐ Davon sind alle wählbar.
- Davon ist max. 1 wählbar.
- Davon sind max. 2 wählbar.
- nicht wählbar.

Einbettung

Handlungsaspekte		Kompetenzbereiche Z+V	F+R	GFD+Z
	O+B			
	E+A	1.B.1 1.B.3	2.B.2	
	M+D	1.C.2		

MA.1.B.1	Zahl- und Operationsbeziehungen sowie Muster erforschen und Erkenntnisse austauschen.
MA.1.B.3	Hilfsmittel beim Erforschen arithmetischer Muster nutzen.
MA.1.C.2	Anzahlen, Zahlenfolgen und Terme veranschaulichen, [beschreiben und verallgemeinern].
MA.2.B.2	Aussagen und Formeln zu geometrischen Beziehungen überprüfen, mit Beispielen belegen und begründen [Geometrie und Algebra verbinden].

Zur Sache

Es geht darum, Zahlen zu untersuchen, die von einem einfachen Algorithmus erzeugt werden. Da die zugrunde liegenden Operationen anspruchslos sind, eignet sich diese «Forschungsarbeit» auch für schwächere Schülerinnen und Schüler.

Stärkere Lernende, insbesondere in oberen Klassen, sollten vollständigere Darstellungen und eventuell Vergleiche mit verwandten Algorithmen dokumentieren.

Die Bearbeitung der Aufgabe ermöglicht ein intensives Kopfrechentraining.

Lösungsbeispiele

A1
Startzahlen mit der Einerziffer 1, 3, 7, oder 9 führen zum Zyklus (zur Schlaufe) (3, 9, 7, 1).
Grüner Graph.

Startzahlen mit der Einerziffer 2, 4, 6, oder 8 führen zum Zyklus (zur Schlaufe) (6, 8, 4, 2).
Blauer Graph.

Startzahlen mit der Einerziffer 0 oder 5 liefern immer wieder diese Einerziffer («Trichterzahlen» oder «Fixzahlen»).

B1
Der **1e**-Algorithmus konserviert alle Endziffern.

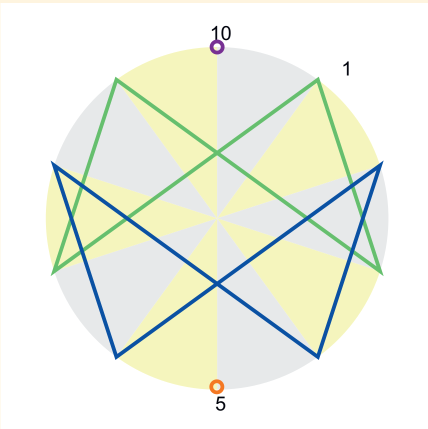
Der **2e**-Algorithmus führt
– zum Zyklus (2, 4, 8, 6) für die Einerziffern 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9
– zur Zahl 0 für die Einerziffern 0 und 5

Der **4e**-Algorithmus führt
– zum Zyklus (4, 6) für die Einerziffern 1, 4, 6, 9
– zum Zyklus (8, 2) für die Einerziffern 2, 3, 7, 8
– zur Zahl 0 für die Einerziffern 0 und 5

Der **5e**-Algorithmus führt
– zur Zahl 0 für alle geraden Einerziffern
– zur Zahl 5 für alle ungeraden Einerziffern

Der **6e**-Algorithmus führt
– zur Zahl 6 für die Einerziffern 1 und 6
– zur Zahl 2 für die Einerziffern 2 und 7
– zur Zahl 8 für die Einerziffern 3 und 8
– zur Zahl 4 für die Einerziffern 4 und 9
– zur Zahl 0 für die Einerziffern 5 und 0

Der **7e**-Algorithmus führt
– zum Zyklus (7, 9, 3, 1) für die Einerziffern 1, 3, 7, 9
– zum Zyklus (4, 8, 6, 2) für die Einerziffern 2, 4, 6, 8
– zur Zahl 0 für die Einerziffer 0
– zur Zahl 5 für die Einerziffer 5
(gleiche Graphen wie der 3e-Algorithmus)

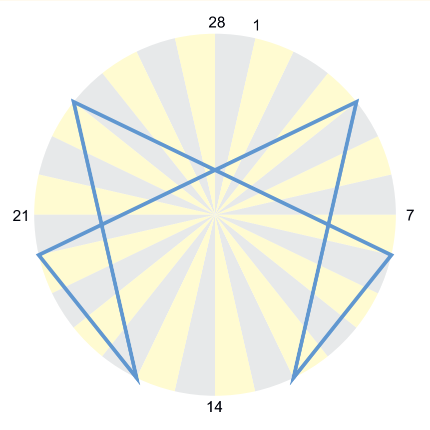


Der **8e**-Algorithmus führt
– zum Zyklus (8, 4, 2, 6) für die Einerziffern 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9
– zur Zahl 0 für die Einerziffern 0 und 5
(gleiche Graphen wie der 2e-Algorithmus)

Der **9e**-Algorithmus führt
– zum Zyklus (9, 1) für die Einerziffern 1 und 9
– zum Zyklus (8, 2) für die Einerziffern 2 und 8
– zum Zyklus (7, 3) für die Einerziffern 3 und 7
– zum Zyklus (6, 4) für die Einerziffern 4 und 6
– zur Zahl 0 für die Einerziffer 0
– zur Zahl 5 für die Einerziffer 5

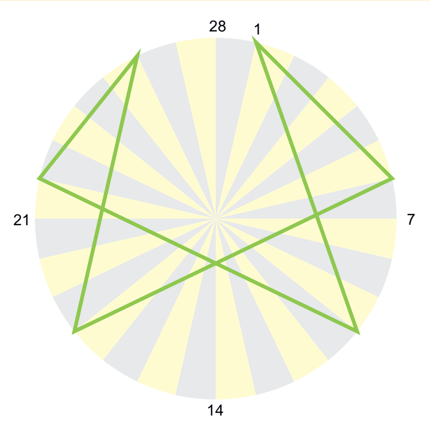
C1, 2

Die Zahlen wiederholen sich. Der Zyklus (die Schlaufe) ist (16, 20, 4, 12, 8, 24).

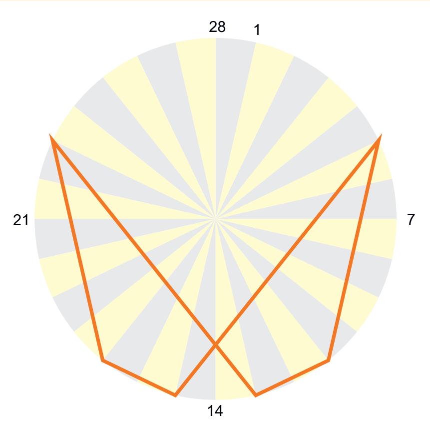


C3, 4

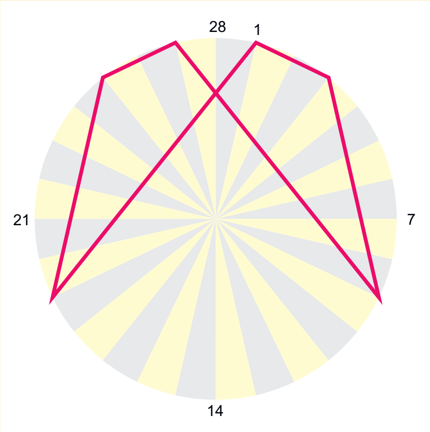
Auftretende 6er-Zyklen:



(2 – 6 – 18 – 26 – 22 – 10)



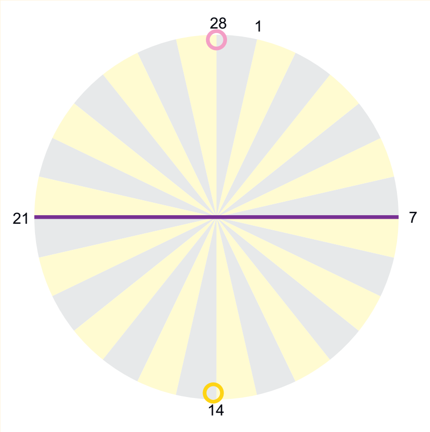
(5 – 15 – 17 – 23 – 13 – 11)



(9 – 27 – 25 – 19 – 29 – 31)

Dazu kommen ein 2er-Zyklus (7–21) und die zwei «Trichterzahlen» (14) und (28).

Für das Verhalten bestimmter Startzahlen, siehe unten bei 8.



5

Was im Diagramm auffällt:

– Die Grafen sind symmetrisch bezüglich der Achse (14–28).
– Je zwei der 6er-Zyklen sind zueinander symmetrisch (Achse [7–21]).

6

Mögliche Vermutungen:

– Alle einstelligen Zahlen führen zu einem 6er-Zyklus. – Gilt.
– Zum «grünen» Zyklus führen nur gerade Zahlen. – Gilt.
– Ungerade Zahlen führen zum «orangen» Zyklus. – Gilt nicht.
– Viererzahlen führen zum «blauen» Zyklus. – Gilt, ausser für Vielfache von 28.
– Vielfache von 14 landen in einem «Trichter». – Gilt.
– Zwei benachbarte Zahlen enden unterschiedlich. – Gilt.
– Ungerade Vielfache von 2 führen zum «grünen» Zyklus. – Gilt, ausser für Vielfache von 14.
– Der «blaue» Zyklus ist der häufigste. – Gilt nicht.

7

Gesetzmässigkeiten:
Formulierungen, die zur folgenden Übersicht passen
(z. B. «Alle Vielfachen von 28 landen bei 28.» oder «Alle Zahlen mit 28er-Rest 11 [11, 39, 67, 95, …] gehören zum orangen Graphen»).

Rosa:	Vielfache von 28
Gelb:	Ungerade Vielfache von 14
Violett:	Ungerade Vielfache von 7
Blau:	Ungerade Vielfache von 14 +/– 2, 6, 10; also 4, 8, 12, 16, 20, 24; 32, 36, 40, 44, 48, 52; usw.
Grün:	Ungerade Vielfache von 14 +/– 4, 8, 12; also 2, 6, 10, 18, 22, 26; 30, 34, 38, 46, 50, 54; usw.
Orange:	Ungerade Vielfache von 14 +/– 1, 3, 9; also 5, 11, 13, 15, 17, 23; 33, 39, 41, 43, 45, 51; usw.
Rot:	Ungerade Vielfache von 14 +/– 5, 11, 13; also 1, 3, 9, 19, 25, 27; 29, 31, 37, 47, 53, 55; usw.

8

Die Zuordnung aller zweistelligen Zahlen zu den Zyklen und Trichtern zeigt ein symmetrisches Muster bezüglich 28.

1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10	11	12	13	**14**	15	16	17	18	19	20	**21**	22	23	24	25	26	27	**28**

29	30					35					40					45					50					55	56
57			60					65					70					75					80				84
85					90					95					100												

Umsetzung

Voraussetzungen

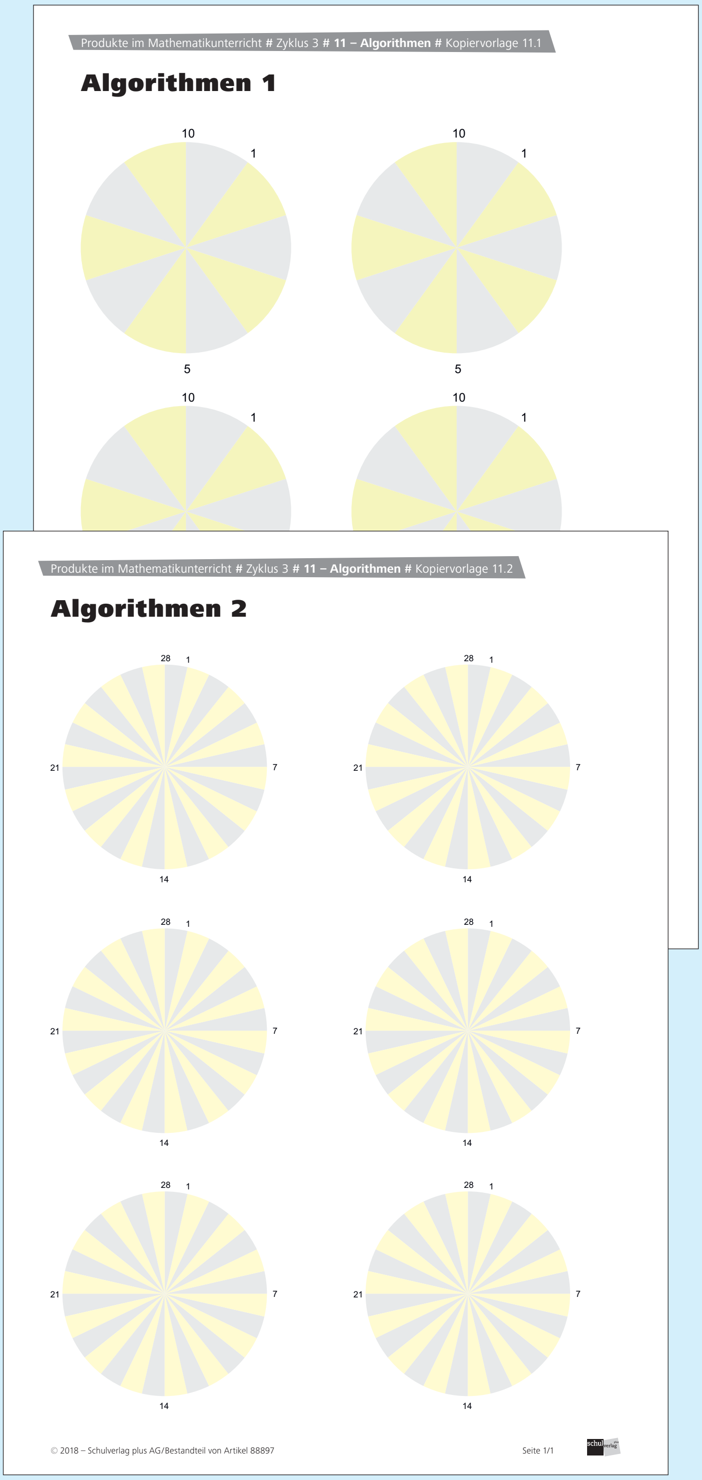
Keine, ausser der Bereitschaft, sich auf Ungewohntes einzulassen

Zeitbedarf

2–3 Lektionen

Material

Kopiervorlagen (KV 11.1 und 11.2)



Inszenierung

In Klassen, die gewohnt sind, Forschungsaufträge auszuführen, kann das Produkt ohne besondere Vorbereitung angegangen werden.

Eine sprachliche Ausrüstung kann anhand eines ähnlichen Beispiels bereitgestellt werden. Geeignet ist z. B. der Algorithmus «4-fache Quersumme» (4z+4e-Algorithmus):

– Alle 3er-Zahlen landen im Trichter (12), (24) oder (36)
– Die Zahlen mit 3er-Rest 1 landen im Zyklus (16 – 28 – 40)
– Die Zahlen mit 3er-Rest 2 landen im Zyklus (8 – 32 – 20)

Beim Besprechen dieser Gesetzmässigkeiten können Ausdrücke wie «Zyklus» oder «Schlaufe» bzw. «Trichter» oder «Fixzahl» geprägt werden.

Da eine tiefer gehende Untersuchung die Abklärung vieler Beispiele erfordert, ist es sinnvoll, ab Niveau 8H die Grundlagen im Team zu erarbeiten (z. B. die Kriterien bis C3). Die Verarbeitung (Kriterien C4 ff.) kann dann aufgrund der gemeinsam gesammelten Beispiele einzeln erfolgen.

Umgang mit den Produkten

Die entstandenen Berichte können Grundlage sein für eine weitergehende Forschungsarbeit mit verwandten Algorithmen. Zum Beispiel bietet sich ein Vergleich mit dem Algorithmus 3z+2e-Algorithmus an (dreifache Zehner plus doppelte Einer):

Gemeinsamkeiten:

– Beide Algorithmen führen zu Schlaufen und Trichtern.
– Bei beiden Algorithmen liegen die Schlaufen- und Trichter-Zahlen unter 30.

Unterschiede:

– Der 3z+2e-Algorithmus hat nur einen Trichter: (17)
– Der 3z+2e-Algorithmus hat nur zwei Schlaufen (dafür längere): (8 – 16 – 15 – 13 – 9 – 18 – 19 – 21) und (3 – 6 – 12 – 7 – 14 – 11 – 5 – 10)

Für weitere Vergleiche muss u. U. ein geeignetes Diagramm für die Darstellung entworfen werden.

Ein dankbares Vertiefungsthema ist «Vielfache von Quersummen».

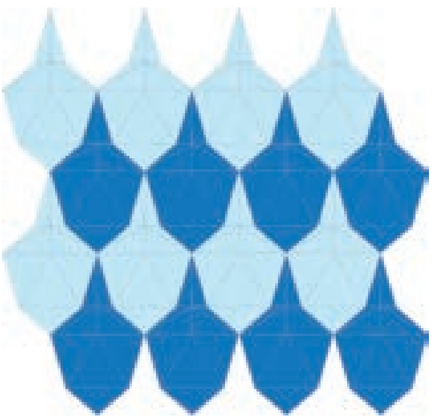
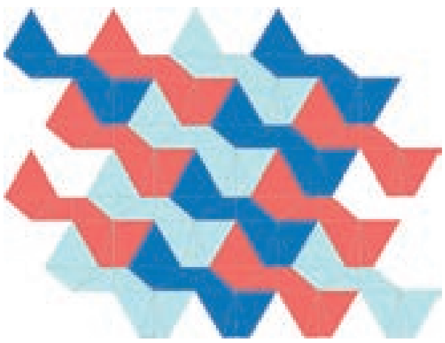
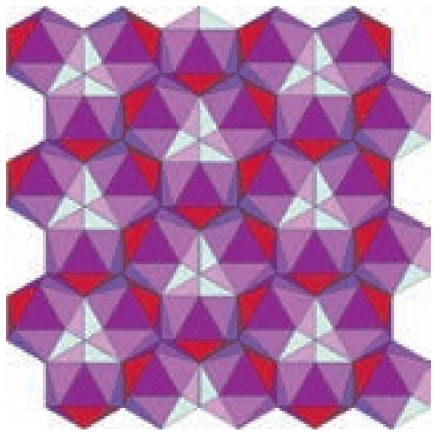
Inszenierung

Das Produkt bedarf keiner speziellen Einführung.

Es ist sinnvoll, die Schülerinnen und Schüler nach dem Lösen der Aufgabe **A** die Puzzleteile überprüfen zu lassen, da die folgenden Aufgaben die korrekte Form der Teile voraussetzen. Zur Kontrolle kann ein Blatt aufgelegt werden, welches die Figur bei Aufgabe **A** im Massstab 2 : 1 zeigt, also in der Grösse der auszuschneidenden Teile.

Umgang mit den Produkten

Weiterführende Ideen
Ausgehend von den Figuren bei **C** lassen sich Raster zeichnen, in denen Parkettierungen gestaltet werden können (ein Beispiel steht als KV 17.1 zur Verfügung).

Parkett mit Achsensymmetrien	**Reines Translationsparkett**	**Parkett mit Drehsymmetrien** (anderes Raster als in der Kopiervorlage)
		

Die Figur von **C2** kann auch als Ansicht eines Ikosaeders gedeutet werden.

Mit dem «gleichseitigen» Puzzleteil als Seitenfläche (Kantenlänge 104 mm) ergeben sich folgende Grössen:

Gesamtkantenlänge: 312 cm

Oberfläche: 936,7 cm^2

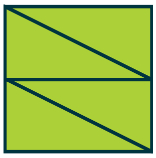
Volumen: 2454 cm^3
(schätzen lassen: 2,5 dm^3)

18 Vierecke

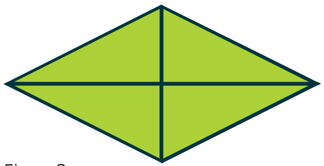
Dreiecke sind die «Atome» der eckigen Figuren. Aus Dreiecken kann man Vierecke und alle Vielecke zusammensetzen.

Aufgabenstellung

Zerlege ein quadratisches Stück Papier (ca. 10 cm • 10 cm) in vier Dreiecke, wie die Figur rechts zeigt.



Figur 1



Figur 2

A
Suche verschiedene Vierecke, die sich aus vier solchen Dreiecken zusammensetzen lassen.
Stelle auf einem Poster etwa zehn solche Vierecke zusammen und bezeichne sie möglichst genau*.

B
Trage in deine Vierecke Symmetrieachsen und Symmetriezentren ein.

C
Zeichne in deine Vierecke Inkreise und Umkreise ein. Begründe, dass es sie gibt.

* Zur Bezeichnung: Die Figuren 1 und 2 sind beides spezielle Parallelogramme.
Die genaue Bezeichnung der Figur 1 ist «Quadrat», die genaue Bezeichnung der Figur 2 ist «Rhombus».

Beurteilungskriterien

				7 G	7 H	8 G	8 H	9 G	9 H
A	1	Du gestaltest das Poster sorgfältig.							
	2	Du bezeichnest alle Vierecke genau.							
	3	Du markierst mindestens 6 Parallelogramme.							
	4	Du markierst 2 symmetrische Trapeze und 2 Drachen.							
B	1	Du zeichnest alle Symmetrieachsen ein.							
	2	Du zeichnest alle Symmetriezentren ein.							
C	1	Du zeichnest alle Inkreise und Umkreise ein.							
	2	Du begründest bei einem der Vierecke, warum es einen Inkreis hat.							
	3	Du begründest bei einem der Vierecke, warum es einen Umkreis hat.							

Genügend: **3** von 5 erfüllt
Gut: **4** von 5 erfüllt
Sehr gut: **5** von 5 erfüllt

Wähle 5 Kriterien für die Bewertung aus.
☐ Davon sind alle wählbar.
Davon sind max. 2 wählbar.
Davon sind max. 3 wählbar.
Davon ist max. 1 wählbar.

Einbettung

Handlungsaspekte	Kompetenzbereiche Z+V	F+R	GFD+Z
O+B		2.A.1 2.A.2	
E+A		2.B.1 2.B.2	
M+D		2.C.2 2.C.3	

MA.2.A.1	Begriffe und Symbole verstehen und verwenden.
MA.2.A.2	Figuren und Körper abbilden, zerlegen und zusammensetzen.
MA.2.B.1	Geometrische Beziehungen, insbesondere zwischen Längen, Flächen und Volumen, erforschen, Vermutungen formulieren und Erkenntnisse austauschen.
MA.2.B.2	Aussagen und Formeln zu geometrischen Beziehungen überprüfen, mit Beispielen belegen und begründen können [Inkreis, Umkreis].
MA.2.C.2	Falten, skizzieren, zeichnen und konstruieren sowie Darstellungen zur ebenen Geometrie austauschen und überprüfen.
MA.2.C.3	Sich Figuren und Körper in verschiedenen Lagen vorstellen, Veränderungen darstellen und beschreiben (Kopfgeometrie).

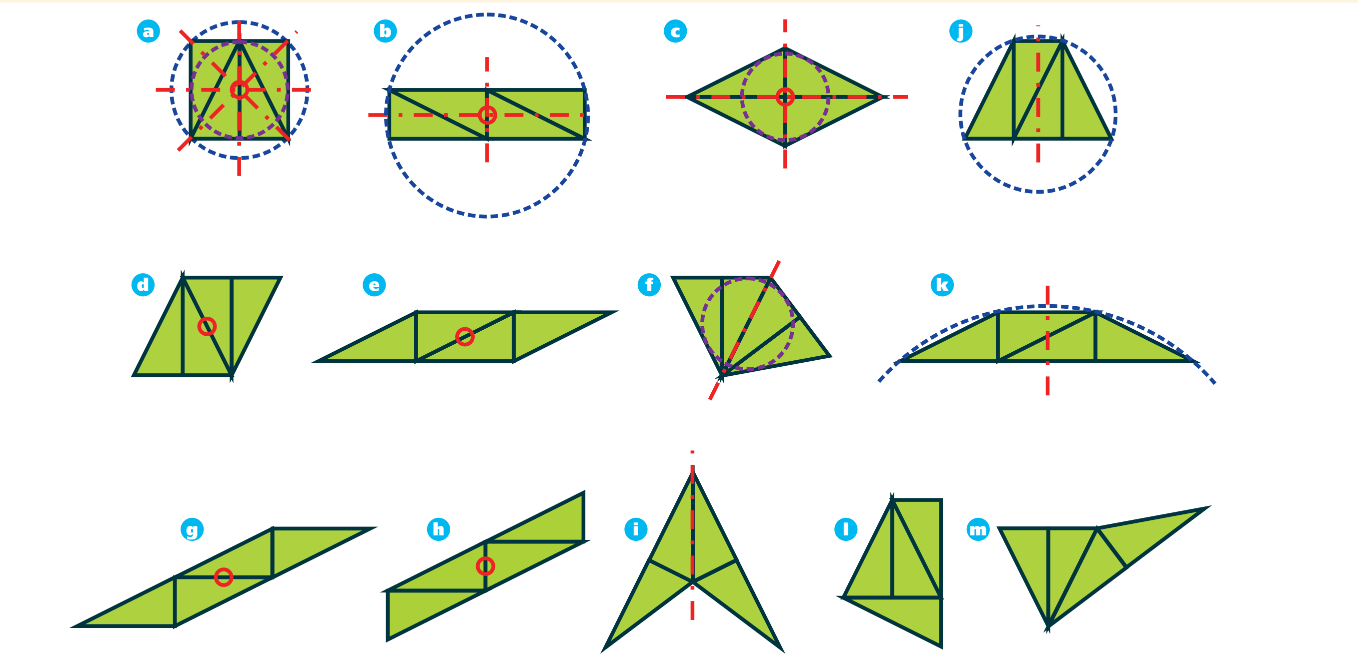
Zur Sache

Es geht darum, eine Sammlung zerlegungsgleicher Vierecke zu erstellen. An diesen Vierecken sollen Begriffe geklärt sowie Symmetrien und andere geometrische Eigenschaften untersucht und begründet werden.

Mit dem vorgegebenen «Baukasten» können 13 verschiedene Vierecke gebildet werden.

Lösungsbeispiele

A, B1

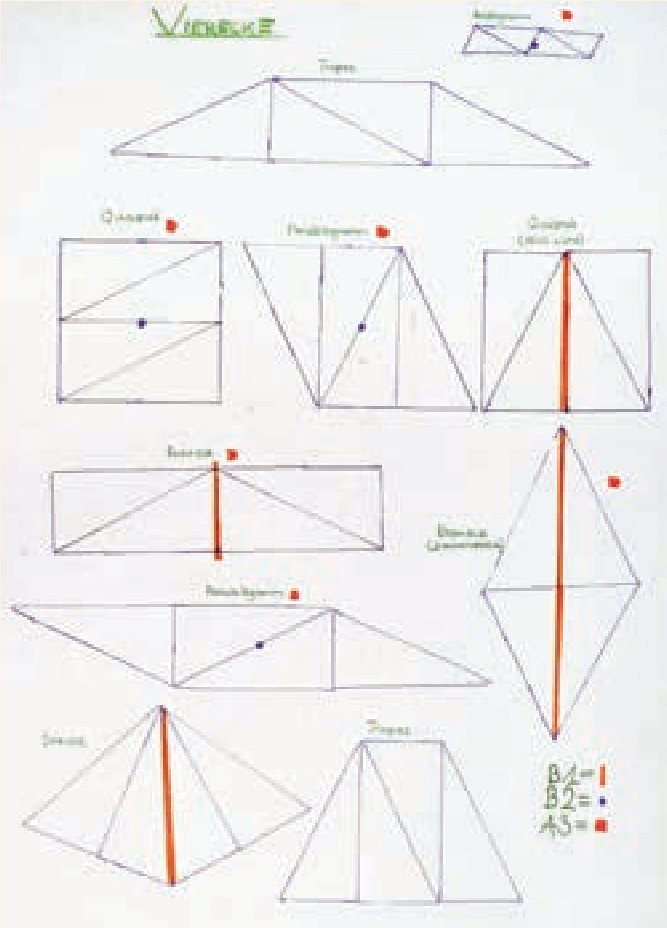


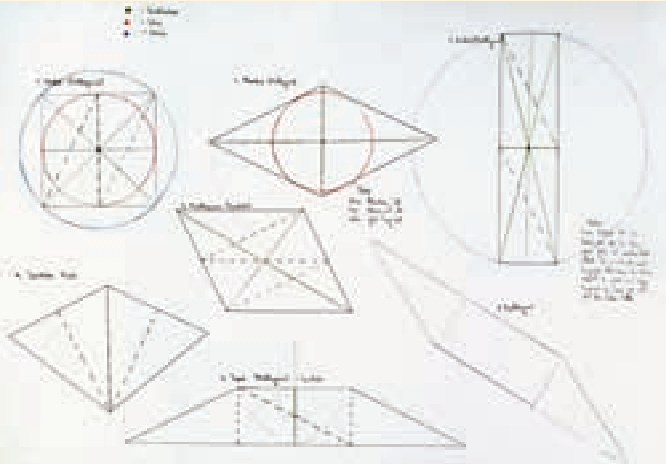
A2

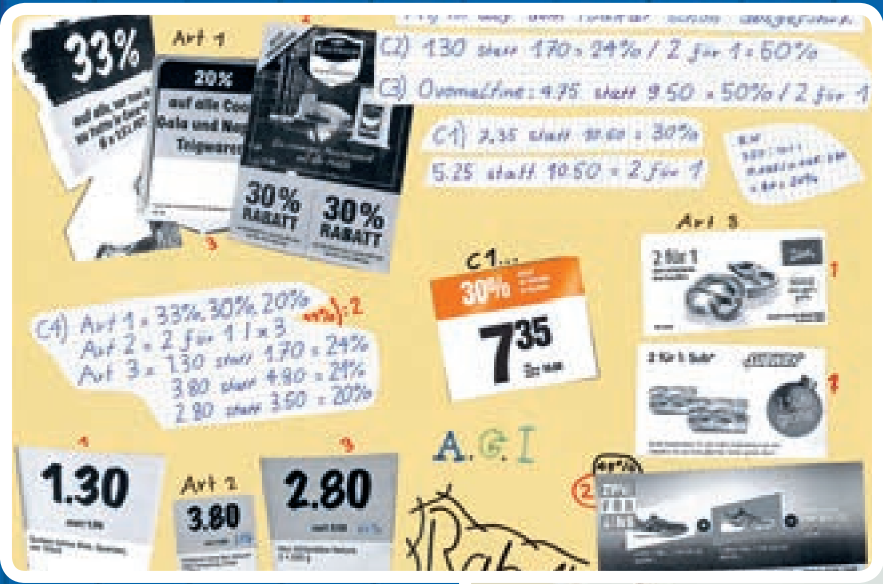
- a Quadrat
- b Rechteck
- c Rhombus (Raute)
- d Parallelogramm
- e Parallelogramm
- f Drachen
- g Parallelogramm
- h Parallelogramm
- i Drachen (Pfeil)
- j (symmetrisches) Trapez
- k (symmetrisches) Trapez
- l Viereck
- m Viereck

A3, A4	**A3, A4**	**B1, B2**
Parallelogramme:	a, b, c, d, e, g, h **(A3)**	punktsymmetrisch **(B2)**
Drachen:	a, c, f, i **(A4)**	Achse entlang einer Diagonalen **(B1)**
Symmetrische Trapeze:	a, b, j, k **(A4)**	Achse entlang einer Mittellinie **(B1)**

C		
Inkreis:	a, c, f **(C1)**	Summe gegenüberliegender Seitenlängen ist gleich **(C2)**
Umkreis:	a, b, j, k **(C1)**	Summe gegenüberliegender Winkel ist 180° **(C3)**







Mit der Einführung des Lehrplan 21 wird in vielen Kantonen die Schülerinnen- und Schülerbeurteilung diskutiert und neu ausgestaltet. Ein Kennzeichen dieser Neuorientierung ist die breitere Abstützung der Bewertung, insbesondere auch auf Produkte.

Diese Publikation unterstützt Lehrpersonen in diesem für die meisten neuen Bereich. Sie enthält eine thematische Einführung und eine Sammlung von Beurteilungsanlässen. Diese sind niveauübergreifend und zum Teil klassenübergreifend ausgelegt. Mit den darin aufgeführten Beispielen können Lehrpersonen Erfahrungen sammeln und Ideen entwickeln, wie Produkte im Mathematikunterricht begleitet und bewertet werden können.

Art.-Nr. 88897
ISBN 978-3-292-00859-6

schulverlag plus

ilz